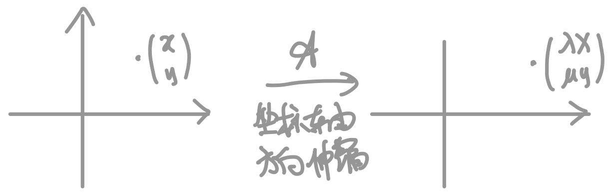
§6.3 特征值与特征向量



$\Rightarrow$ 𝒜在$\binom{1}{0},\binom{0}{1}$下的矩阵为$\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \mu\end{pmatrix}$

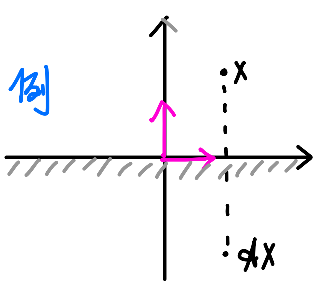
问题: 是否任意线性变换都由某组基下的各个方向伸缩给出? ×
哪些线性变换可由某组基下的伸缩给出? 即在合适的基下为对角阵? 为了研究这一问题我们需要引入

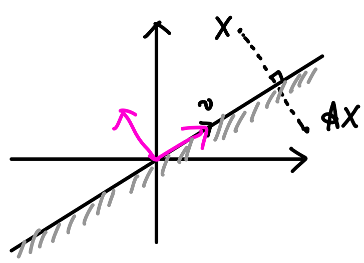
定义: V = n维F-向量空间. $\mathcal{A}: V\to V$ 线性变换. 若 $\exists \lambda\in F$, $\alpha\in V\setminus\{0\}$ s.t. $\mathcal{A}\alpha=\lambda\alpha$, 则称$\lambda$为$\mathcal{A}$的一个特征值, α称为属于λ的一个特征向量.

特征子空间 $V_{\mathcal{A}}(\lambda) := \ker(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}) = \{\alpha\in V \mid \mathcal{A}\alpha=\lambda\alpha\}$

几何解释: $\mathcal{A}$ 的特征向量的方向在$\mathcal{A}$作用下保持不变!

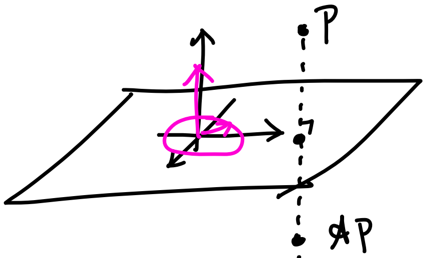
例

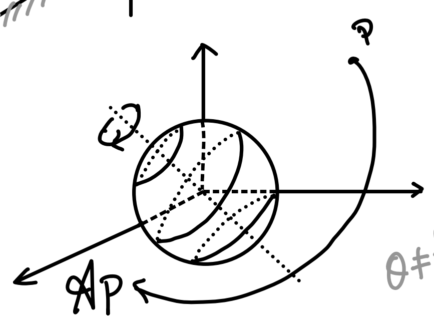




$\mathcal{A}_0$

3维空间中旋转





$\theta\neq k\pi$

例

怎么求特征值与特征向量.（几何 $\Leftrightarrow$ 代数）

线性变换与矩阵的对应：

设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 n 维 F-线性空间的一组基.

$$\mathscr{A}: V \to V \xleftrightarrow[1:1]{\alpha_1\cdots\alpha_n} A \in F^{n\times n}$$

$$\mathscr{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n) = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$$

定义：$A\in F^{n\times n}$. 若 $\exists\, \lambda\in F$, $x\in F^n\setminus\{0\}$（列向量）s.t. $Ax=\lambda x$

则称 λ 为方阵 A 的特征值，而称 x 为属于特征值 λ 的一个特征向量.

特征子空间. $V_A(\lambda) := \{\vec{x}\in F^n \mid A\vec{x}=\lambda\vec{x}\}$

求 $\mathscr{A}$ 的特征值和特征向量可转换为求 A 的特征值与特征向量

性质：$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$, $\mathscr{A}$, A 如上，则

1) $\mathscr{A}$ 与 A 有相同的特征值

2) 设 λ 为 $\mathscr{A}$ 的特征值，则

$$V_{\mathscr{A}}(\lambda) = \{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\vec{x} \mid \vec{x}\in V_A(\lambda)\}$$

证：$\forall\, v=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\vec{x}\in V$　$\forall\,\lambda\in F$

$$v\in V_{\mathscr{A}}(\lambda) \Leftrightarrow \mathscr{A}v=\lambda v \Leftrightarrow \mathscr{A}(\alpha_1\cdots\alpha_n)\vec{x} = \lambda(\alpha_1\cdots\alpha_n)\vec{x}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1\cdots\alpha_n)(A\vec{x}) = (\alpha_1\cdots\alpha_n)(\lambda\vec{x})$$

$$\Leftrightarrow A\vec{x}=\lambda\vec{x} \Leftrightarrow \vec{x}\in V_A(\lambda) \qquad \square$$

性质：λ 为 A 的特征值，则

1) λ^k 为 A^k 的特征值　　$f(A)$?　　$\exp(A)$

2) λ 为 A^T 的特征值

3) 若 $\lambda \neq 0$，则 $\frac{1}{\lambda}\det A$ 为 A^*（A 的伴随矩阵）的特征值

　特别地 若 A 可逆，则 $\frac{1}{\lambda}$ 为 A^{-1} 的特征值.

4). 若 $\underbrace{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ 且 } AA^T = I}_{\text{正交矩阵}}$，则 $|\lambda| = 1$.

证：$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$　$(\vec{x} \neq 0)$.

1) $A^k\vec{x} = A^{k-1}\cdot A\vec{x} = A^{k-1}(\lambda\vec{x}) = \lambda(A^{k-1}\vec{x}) = \cdots = \lambda^k\vec{x}$

2) $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A^T) = P_{A^T}(\lambda)$

3). $A^*A = \det(A)I$

$\Rightarrow A^*A\vec{x} = \det(A)\vec{x} \Rightarrow A^*(\lambda\vec{x}) = \det(A)\vec{x}$

$\Rightarrow A^*\vec{x} = \frac{1}{\lambda}\det(A)\vec{x} \Rightarrow \frac{1}{\lambda}\det(A)$ 为 A^* 的特征值.

4). $Ax = \lambda x \Rightarrow x^TA^T = \lambda x^T \Rightarrow \bar{x}^TA^T = \bar{\lambda}\bar{x}^T$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \bar{x}^TA^TAx = \bar{\lambda}\bar{x}^T\cdot\lambda x = |\lambda|^2\cdot\bar{x}^Tx \\ A^TA = I \Rightarrow \bar{x}^TA^TAx = \bar{x}^Tx \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow (|\lambda|^2 - 1)\cdot\bar{x}^Tx = 0 \xrightarrow{\bar{x}^Tx \neq 0} |\lambda|^2 = 1.$$

§6.3.2. 特征值与特征向量的计算

例 $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}$，求A的特征值与特征向量.

Pf: $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1-\lambda&1\\1&3-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0 \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq 0$

$\Rightarrow \det\begin{pmatrix}1-\lambda&1\\1&3-\lambda\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \lambda=2\pm\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(2+\sqrt{2})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\1+\sqrt{2}\end{pmatrix} \\ \text{or} \\ A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(2-\sqrt{2})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\1-\sqrt{2}\end{pmatrix} \end{cases}$$

总结一般方法：

$A=(a_{ij})_{n\times n}\in F^{n\times n}$. 若 $A\vec{x}=\lambda_0\vec{x}$ $(\vec{x}\neq 0)$，则

λ_0 为A的特征值 $\Leftrightarrow \exists\, \vec{x}\neq 0$ s.t. $A\vec{x}=\lambda_0\vec{x}$

$\Leftrightarrow (\lambda_0 I-A)\vec{x}=0$ 有非零解

$\Leftrightarrow \det(\lambda_0 I-A)=0$

即 λ_0 为 A 的特征值 $\Leftrightarrow$ λ_0 为多项式 $\det(\lambda I-A)$ 的根.

称行列式 $\det(\lambda I-A)$ 为 A 的**特征多项式**，记为 $P_A(\lambda)$.

注：1) 数域F上的多项式在F上不一定有根！ 例 $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ $x^2+1/\mathbb{R}$.

2) (代数基本定理) 复数域 $\mathbb{C}$ 上非常值多项式在 $\mathbb{C}$ 上一定有根.

④ 总假设 $F=\mathbb{C}$.

$\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

(1) 求 $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$. 设

$$P_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1} \cdot (\lambda-\lambda_2)^{n_2} \cdot \cdots \cdot (\lambda-\lambda_s)^{n_s}$$

其中 $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $n_i \geq 1$, $n_1+n_2+\cdots+n_s = n$. 我们称 n_i 为特征值 λ_i 的重数

(2). 给定 $i=1,\cdots,s$. 解方程组 $(\lambda_i I - A)\vec{x}=0$ 得解空间 $V_A(\lambda_i)$.
或基础解系.

例: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

解: $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & 2 \\ -2 & \lambda & 2 \\ -2 & 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)^2 \quad \Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=1.$

即 A 有两不同的特征值 $\lambda_1=0, \lambda_2=1$.

$(0\cdot I - A)\vec{x}=0 \Rightarrow \vec{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $(c_1\neq 0)$ 为属于 0 的特征向量

$(1\cdot I-A)\vec{x}=0 \Rightarrow \vec{x}=c_2\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow c_2\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$ (c_2,c_3不全为零) 为属于1特征向量

例 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$, $V=F^{2\times 2}$, $\mathcal{A}: V\to V \quad M \mapsto AM$.
求 $\mathcal{A}$ 的特征值和特征向量.

解: $V = \langle e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22} \rangle$

$$\mathcal{A}(e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}) = (e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{= \tilde{A}}$$

$$\Rightarrow P_{\tilde{A}}(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$$

$\Rightarrow \mathscr{A}$ 的特征值为 1, 1, 2, 2.

$\lambda=1$: $(I-\tilde{A})\vec{x}=0 \Rightarrow$ 基础解系 $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\vec{x}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

$\lambda=2$: $(2I-\tilde{A})\vec{x}=0 \Rightarrow$ 基础解系 $\vec{x}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{x}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

可以用矩阵来定义线性变换的哪些量.(即不依赖于基的选取.)

性质: 相似的矩阵具有相同的特征多项式和特征值.

证: 设 $B=T^{-1}AT$

$$P_B(\lambda)=|\lambda I-B|=|\lambda I-T^{-1}AT|=|T^{-1}(\lambda I-A)T|=|\lambda I-A|=P_A(\lambda)$$ □

即,可以用矩阵来定义线性变换的特征多项式和特征值.

其它相似不变量:

定理: $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$. $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的 n 个特征值 (可能有重复的) 则

1) $tr(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$

2) $\det(A)=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

证: $P_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & & -a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$

记 $P_A(\lambda)=\lambda^n+\sigma_1\lambda^{n-1}+\cdots+\sigma_{n-1}\lambda+\sigma_n$

$\quad\quad =(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)$

· 根与系数关系 $\Rightarrow \begin{cases}\sigma_1=-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\\ \sigma_n=(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\end{cases}$

- $\sigma_n = P_A(0) = |-A| = (-1)^n |A|$
- $\sigma_1 = P_A(\lambda)$ 中 λ^{n-1} 的系数

$= (\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})$ 中 λ^{n-1} 的系数

$= -(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})$

$= -tr(A)$ □

推论: n 阶方阵可逆 $\Leftrightarrow$ n 个特征值都不为零

注: 特征多项式, 特征值, 行列式 均为矩阵的相似不变量

例: 设 n 阶方阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. 求 $I+A$ 的特征值与行列式

换成 $f(A)$ 呢?

解 $P_{I+A}(\lambda) = \det(\lambda I - (I+A)) = \det((\lambda-1)I - A)$

$= P_A(\lambda-1) = ((\lambda-1)-\lambda_1)((\lambda-1)-\lambda_2)\cdots((\lambda-1)-\lambda_n)$

$= (\lambda-(1+\lambda_1))(\lambda-(1+\lambda_2))\cdots(\lambda-(1+\lambda_n))$

$\det(I+A) = \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)$. □

例: 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似, 求 x, y.

解: $tr(A) = tr(B) \Rightarrow 1+x = y$

$\det A = \det B \Rightarrow -1 = -y$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

或 $P_A(\lambda) = P_B(\lambda) \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda(\lambda-x)-1) = (\lambda-y)(\lambda+1)(\lambda-1) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$